ZAHLENFOLGEN

Teil 2

Arithmetische und geometrische Folgen

Die wichtigsten Theorieteile

und <u>ganz ausführliches</u> Training

Datei Nr. 40012

Neu überarbeitet

Stand: 17. Juli 2016

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Die Texte über Folgen wurden sehr erweitert und überarbeitet. Daher sollte man sich auch in folgenden Texten umsehen:

40011 **Einführung**

Rekursive und explizite Berechnungsformeln

Die wichtigsten Grundlagen zu arithmetischen und geometrischen Folgen

Geometrische Folgen als Wachstumsfolgen (kurze Einführung)

40012 **Arithmetische und geometrische Folgen – Viel Übung (Dieser Text)**

Hier die *sehr ausführliche* Behandlung dieser Folgen

40013 **Arithmetische Folgen 2. Ordnung**

Dies wurde auch schon in 40011 angesprochen.

40019 **Geometrische Folgen als Wachstumsfolgen**

Prozentuales (exponentielles) Wachstum und Abnahme (wie Zinseszinsrechnung, radioaktiver Zerfall).
Hier wird noch einmal besprochen, was kurz in 40011 gezeigt worden ist.
Wer es also ausführlicher braucht, lese hier nach!

40020 **Spezielle Wachstumsfolgen**

Hier geht es um die rekursive Formel $u_n = u_{n-1} \cdot q + r$.
und die explizite Berechnung der Formeln.

Zu den Anwendungen gehören auch schwierigere finanzmathematische Vorgänge wie Ratensparen, Rentenzahlung, Darlehensfinanzierung.

Allgemein beschreiben diese Folgen das beschränkte Wachstum.
Dazu gehört auch die beschränkte Abnahme (Abkühlungsvorgänge u.a.).

40050 **Arithmetische und geometrische Reihen**

40060 **Geometrische Figuren als geometrische Folgen**

Es kommen auch Teilaufgaben zu Reihen vor.

40200 **Aufgabensammlung zu ar./geom. Folgen und Reihen**

Inhalt

Anwendungen zu geometrischen Folgen stehen in den Texten 40019 und 40060.

1 Arithmetische Zahlenfolgen

1.1 Arithmetische Folgen definieren und erkennen

Man kann arithmetische und geometrische Folgen auf unterschiedlichste Weise einführen. Ich zeige Beispiele dazu im Anhang. Hier greife ich auf die vielleicht gebräuchlichste Definition zurück, die auch am besten zur Überprüfung dieser Folgen geeignet ist.

Beispiel 1 $a_1 = 12;\ a_2 = 16;\ a_3 = 20;\ a_4 = 24;\ \ldots$

Bei der Folge ist immer der Nachfolger um 4 größer als der Vorgänger.
Dies kann man als implizite Berechnungsgleichung so aufschreiben:

$\boxed{a_{n+1} = a_n + 4}$ oder $\boxed{a_n = a_{n-1} + 4}$ mit $a_1 = 12$

bzw. $\boxed{a_{n+1} - a_n = 4}$ oder $\boxed{a_n - a_{n-1} = 4}$

Man formuliert das als Pflichtsatz im Heft so:

Die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist konstant (und zwar hier gleich 4).

MERKE:

Eine Folge, bei der die Differenz aufeinander folgender Glieder immer gleich groß ist, heißt eine arithmetische Folge.

Beispiel 2 $a_1 = -20;\ a_2 = 11;\ a_3 = 42;\ a_4 = 73;\ \ldots$

Rechnung:

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 11 - (-20) = 31 \\ a_3 - a_2 &= 42 - 11 = 31 \\ a_4 - a_3 &= 73 - 42 = 31 \end{aligned}\right\} \boxed{a_{n+1} - a_n = 31}$$

Weil die Differenzen aufeinander folgender Glieder gleich groß sind, liegt eine arithmetische Folge vor.

Rekursive Darstellung: $\boxed{a_{n+1} = a_n + 31 \text{ mit } a_1 = -20}$

WICHTIGER HINWEIS:

Immer wenn man eine Folge aus einigen gegebenen Gliedern identifiziert und einem Typ zuordnet, muss man eigentlich sagen:
Es **kann** sich um eine solche Folge dieses Typs handeln.
Es gibt nämlich stets unendlich viele Folgen, die in diesen gegebenen Gliedern übereinstimmen, dahinter aber abweichen!

Bei dieser arithmetischen Folge ist $a_5 = 104$. Würde aber man $a_5 = 103$ verwenden, läge schon keine arithmetische Folge mehr vor. In der Regel aber sind die Aufgaben so gestellt, dass man sagen kann, es liegt eine solche „…“ Folge vor. Denn der Aufgabensteller will ja, dass man gerade diesen Typ identifiziert. Aber vom Prinzip her muss man wissen, dass es eben auch andere gibt!

Beispiel 3 $a_1 = 14$; $a_2 = 4$; $a_3 = -6$; $a_4 = -16$; ....

Differenzen aufeinander folgender Glieder:

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 4 - 14 = -10 \\ a_3 - a_2 &= -6 - 4 = -10 \\ a_4 - a_3 &= -16 - (-6) = -16 + 6 = -10 \end{aligned}\right\} \boxed{a_{n+1} - a_n = -10}$$

Weil die Differenzen aufeinander folgender Glieder gleich groß sind, liegt eine arithmetische Folge vor.

(Dies ist der Pflichtsatz zur Begründung des Ergebnisses. Und man muss alle möglichen Differenzen aufeinander folgender Glieder untersuchen! Und man erinnere sich an den Hinweis!)

Diese Folge fällt, weil fortgesetzt 10 subtrahiert, also -10 addiert wird.

Man kann für diese Folge die rekursive Darstellung so anschreiben: $\boxed{a_{n+1} = a_n - 10}$ mit $a_1 = 14$

Beispiel 4

Gegeben ist diese Folge: $\frac{5}{2}$, 4, $\frac{11}{2}$, 7, ...

Um herauszufinden, ob eine arithmetische Folge vorliegen kann, berechnet man alle möglichen

Differenzen:

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 4 - \tfrac{5}{2} = \tfrac{8}{2} - \tfrac{5}{2} = \tfrac{3}{2} \\ a_3 - a_2 &= \tfrac{11}{2} - 4 = \tfrac{11}{2} - \tfrac{8}{2} = \tfrac{3}{2} \\ a_4 - a_3 &= 7 - \tfrac{11}{2} = \tfrac{14}{2} - \tfrac{11}{2} = \tfrac{3}{2}. \end{aligned}\right\} \boxed{a_{n+1} - a_n = \tfrac{3}{2}}$$

Weil die Differenzen aufeinander folgender Glieder gleich groß sind, liegt eine arithmetische Folge vor.

Rekursive Darstellung der Folge: $\boxed{a_{n+1} = a_n + \frac{3}{2}}$ mit $a_1 = \frac{5}{2}$

Zu arithmetischen Folgen gibt es natürlich auch explizite Formeln, die wir jetzt bestimmen wollen.

1.2 Arithmetische Folgen rekursiv berechnen

Es gibt prinzipiell zwei Arten der Berechnung für Zahlenfolgen:

1. Art: Bei der **rekursiven Berechnung** muss man einen Anfangswert kennen und eine Vorschrift, wie man den Nachfolger aus dem Vorgänger berechnet.

2. Art: Bei der **expliziten Berechnung** kann man direkt jedes beliebige Glied der Folge mittels eines Funktionsterms berechnen.

Beispiel 1: Es sei $a_1 = 18$ und $\boxed{a_{n+1} = a_n + 11}$

Dann folgt: $a_2 = a_1 + 11 = 18 + 11 = 29$

und daraus: $a_3 = a_2 + 11 = 29 + 11 = 40$

und daraus: $a_4 = a_3 + 11 = 40 + 11 = 51$ usw.

Soll man jedoch a_{40} berechnen, geht das erst, wenn man zuvor alle Glieder bis a_{39} berechnet hat. Dann folgt:

$$a_{40} = a_{39} + 11 = \ldots$$

Das war die rekursive Art der Berechnung.

Für dieselbe Folge gibt es auch einen Funktionsterm: $\boxed{a_n = 11 \cdot n + 7}$

Wir überprüfen dies, indem wir die ermittelten Werte noch einmal berechnen:

$$a_1 = 11 \cdot 1 + 7 = 18$$

$$a_2 = 11 \cdot 2 + 7 = 22 + 7 = 29$$

$$a_3 = 11 \cdot 3 + 7 = 33 + 7 = 40$$

$$a_4 = 11 \cdot 4 + 7 = 44 + 7 = 51$$

Und sogar: $a_{40} = 11 \cdot 40 + 7 = 440 + 7 = 447$

Man erkennt den Vorteil: Hier benötigt man keinen Vorgänger, kann also sofort jedes beliebige Glied berechnen, also auch $a_{5628} = 11 \cdot 5628 + 7 = 61915$.

Dies war die explizite Art der Berechnung.

Beispiel 2: Es sei $a_1 = 60$ und $\boxed{a_n = a_{n-1} - 6}$

Im Unterschied zu Beispiel 1 wird in der Berechnungsformel der Nachfolger mit a_n bezeichnet und der Vorgänger mit a_{n-1}. Man könnte diese Vorschrift auch so schreiben: $a_{n+1} = a_n - 6$. Das ergibt dieselbe Methode und dieselben Werte.

Die explizite Form für diese Folge ist $\boxed{a_n = 66 - 6 \cdot n}$.

Aufgabe: Berechne die folgenden Glieder dieser Folge zuerst rekursiv, dann explizit:

$a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_{100}$

Die Lösung steht auf der nächsten Seite.

Lösung:

Rekursiv:	**Explizit:**
Aus $a_1 = 60$ und $\boxed{a_n = a_{n-1} - 6}$	Aus $\boxed{a_n = 66 - 6 \cdot n}$ folgt
	$a_1 = 66 - 6 \cdot 1 = 66 - 6 = 60$
folgt: $a_2 = a_1 - 6 = 60 - 6 = 54$	$a_2 = 66 - 6 \cdot 2 = 66 - 12 = 54$
$a_3 = a_2 - 6 = 54 - 6 = 48$	$a_3 = 66 - 6 \cdot 3 = 66 - 18 = 48$
$a_4 = a_3 - 6 = 48 - 6 = 42$	$a_4 = 66 - 6 \cdot 4 = 66 - 24 = 42$
$a_5 = a_4 - 6 = 42 - 6 = 36$	$a_5 = 66 - 6 \cdot 5 = 66 - 30 = 36$
$a_{100} = a_{99} - 6 = ? - 6 = ?$	$a_{100} = 66 - 6 \cdot 100 = 66 - 600 = -534$

Es ist natürlich klar, dass man a_{100} nicht mehr rekursiv berechnet, denn man müsste ja zuvor a_1 bis a_{99} kennen!

Beispiel 3: Gegeben sei $\boxed{a_n = a_{n-1} + 14}$ und $a_4 = -20$. Berechne rekursiv a_1 bis a_6.

Jetzt kennt man plötzlich nicht a_1 sondern a_4.

Zuerst rechnen wir von a_4 aus „nach oben“:

$$a_5 = a_4 + 14 = -20 + 14 = -6$$
$$a_6 = a_5 + 14 = -6 + 14 = 8$$

Nun müssen wir zurückrechnen, also die Vorgänger aus den Nachfolgern bestimmen.
Dazu stellen wir die Formel um: Aus $a_n = a_{n-1} + 14$ wird dann $a_{n-1} = a_n - 14$.

Das ist aber eigentlich klar, denn wenn man für den Nachfolger immer 14 dazuaddieren muss, dann entsteht der Vorgänger aus dem Nachfolger durch Subtraktion von 14!

$$a_3 = a_4 - 14 = -20 - 14 = -34$$
$$a_2 = a_3 - 14 = -34 - 14 = -48$$
$$a_1 = a_2 - 14 = -48 - 14 = -62.$$

Trainingsaufgaben 1

(1) Berechne a_2 bis a_5 zu
a) $a_{n+1} = a_n + 24$, $a_1 = 13$
b) $a_n = a_{n-1} - \frac{3}{2}$, $a_1 = 2$

(2) Berechne a_1 bis a_6 zu:
a) $a_n = a_{n-1} - 10$, $a_3 = 100$
b) $a_{n+1} = a_n + 12$, $a_7 = 36$

(3) Berechne a_1 bis a_6 mit:
a) $a_{n+2} = a_n - 30$, $a_1 = 15$
b) $a_{n+1} = a_{n-1} + 1$, $a_3 = -1$

(4) Berechne a_2 bis a_4 mittels $a_n = a_{n-1} + 100$.

Lösungen am Textende

1.3 Arithmetische Folgen: Herleitung einer expliziten Formel

(Bitte gründlich mitdenken und verstehen!)

(1) Der rote Pfeil zeigt, wohin man kommt, wenn man statt um d gleich um 2d, 3d, 4d weiter geht:

Man kommt entweder von a_1 nach a_3 durch $a_3 = a_1 + \boxed{2}d$,

oder von a_1 nach a_4 durch $a_4 = a_1 + \boxed{3}d$,

oder von a_1 nach a_5 durch $a_5 = a_1 + \boxed{4}d$, usw.

Hier erkennt man das „**Lattenzaunprinzip**“:

Zwischen der 1. und 3. Latte gibt es 2 Zwischenräume,

zwischen der 1. und 4. Latte gibt es 3 Zwischenräume,

zwischen der 1. und 5. Latte gibt es 4 Zwischenräume, usw.

Verallgemeinert heißt das:

Zwischen der 1. und n. Latte gibt es (n-1) Zwischenräume:

Man kommt also von a_1 nach a_n durch $a_n = a_1 + \boxed{n-1}d$

Dieses Prinzip gilt für zwei beliebige Folgenglieder:

Man kommt von $a_2 = 21$ nach $a_8 = 39$ durch $a_{39} = a_{21} + \boxed{39-21}d = a_1 + \boxed{18}d$

Man kann also a_{12} aus a_1 berechnen, indem man 11 Differenzen d dazu addiert:

$$a_{12} = a_1 + 11 \cdot d = 18 + 11 \cdot 3 = 18 + 33 = 51.$$

Oder man erhält a_{25} aus $a_{12} = 51$, indem man $(25-12) \cdot d = 13 \cdot 3 = 39$ dazu addiert:

$$a_{25} = a_{12} + \boxed{13} \cdot d = 51 + 13 \cdot 3 = 51 + 39 = 90$$

Für arithmetische Folgen gilt also diese explizite Berechnungsformel:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Setzen wir hier die Gegebenheiten ein, also $a_1 = 18$ und $d = 3$, dann folgt:

$$a_n = 18 + (n-1) \cdot 3$$

Umgeformt: $a_n = 18 + 3n - 3$

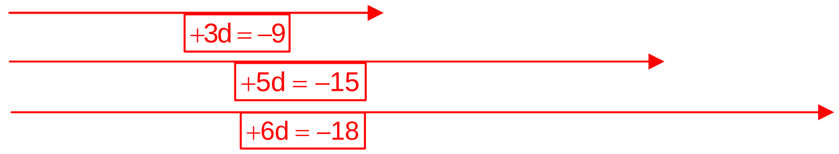
Explizite Formel: $\boxed{a_n = 15 + 3n}$

Damit kann man jetzt jedes beliebige Glied der Folge berechnen.

(2) Bei der Folge $a_1 = 4$; $a_2 = 1$; $a_3 = -2$; $a_4 = -5$; $a_5 = -8$ stellt man fest,

dass die Differenz aufeinander folgender Glieder -3 ist (nicht 3 !!!), denn der Nachfolger entsteht immer durch Addition der Zahl d = -3:

$$4 \xrightarrow[-3]{} 1 \xrightarrow[-3]{} -2 \xrightarrow[-3]{} -5 \xrightarrow[-3]{} -8 \xrightarrow[-3]{} -11 \xrightarrow[-3]{} -14 \xrightarrow[-3]{} -17...$$



Die roten Pfeile zeigen, wohin man kommt, wenn man statt um d gleich um 3d bzw. 5d oder 6d weiter geht. Dazu die Rechnungen:

$$a_4 = a_1 + (4-1)\cdot d = 4 + 3\cdot(-3) = 4 - 9 = -5$$
$$a_6 = a_1 + (6-1)\cdot d = 4 + 5\cdot(-3) = 4 - 15 = -11$$
$$a_7 = a_1 + (7-1)\cdot d = 4 + 6\cdot(-3) = 4 - 18 = -14$$

Wir wollen auch hier eine explizite Berechnungsformel, also einen Funktionsterm erstellen:

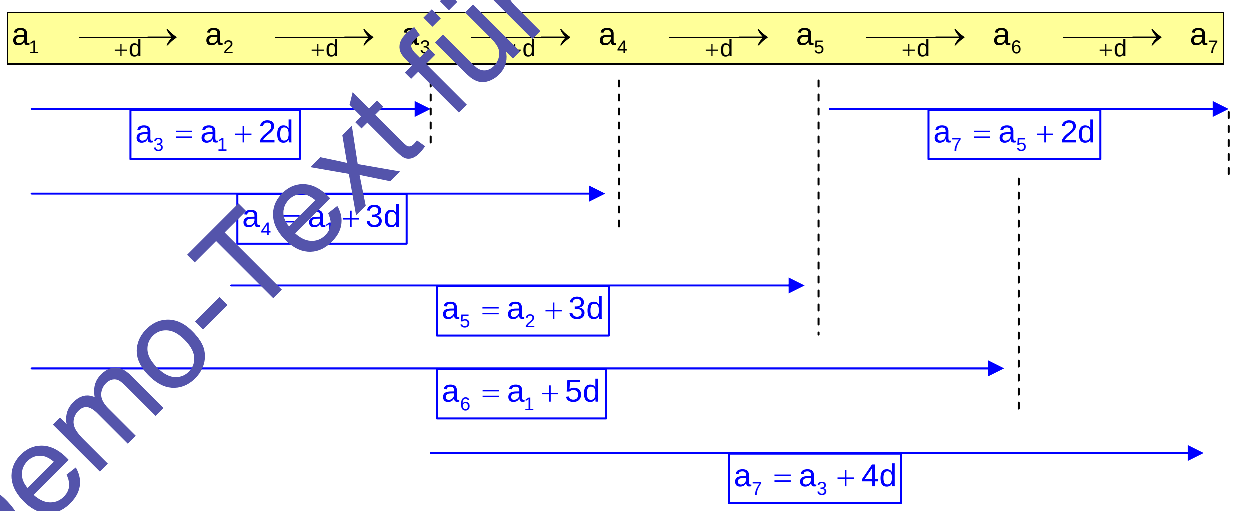
Will man a_n aus a_1 berechnen, muss man zu a_1 (n-1)-mal d addieren:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$$

Ausführlich: $a_n = 4 + (n-1)\cdot(-3) = 4 - 3n + 3 = 7 - 3n$

$$\boxed{a_n = -3n + 7}$$

(3) **Denken Sie mal über diese Grafik nach.**



Betrachten wir $a_6 - a_2 = 4d$. Dies bedeutet $a_6 = a_2 + 4d$. (Zwischen der 6. und der 2. Latte sind 4 Zwischenräume)

Oder: $a_4 - a_1 = 3d$ also $a_4 = a_1 + 3d$. (Zwischen der 1. und 4. Latte sind drei Zwischenräume).

(2) Bei der Folge $a_1 = 4$; $a_2 = 1$; $a_3 = -2$; $a_4 = -5$; $a_5 = -8$ stellt man schnell fest, dass die Differenz aufeinander folgender Glieder -3 ist, d. h. der Nachfolger entsteht immer durch Addition der Zahl d = -3:

$$4 \xrightarrow[-3]{} 1 \xrightarrow[-3]{} -2 \xrightarrow[-3]{} -5 \xrightarrow[-3]{} -8 \xrightarrow[-3]{} -11 \xrightarrow[-3]{} -14 \xrightarrow[-3]{} -17\ldots$$

$+3d = -9$

$+5d = -15$

$+6d = -18$

Die roten Pfeile zeigen, wohin man kommt, wenn man statt um d gleich um 5d bzw. 6b oder 3d weiter geht. Dazu die Rechnungen:

$$a_4 = a_1 + (4-1)\cdot d = 4 + 3\cdot(-3) = 4 - 9 = -5$$
$$a_6 = a_1 + (6-1)\cdot d = 4 + 5\cdot(-3) = 4 - 15 = -11$$
$$a_7 = a_1 + (7-1)\cdot d = 4 + 6\cdot(-3) = 4 - 18 = -14$$

Wir wollen auch hier eine explizite Berechnungsformel, also einen Funktionsterm erstellen:

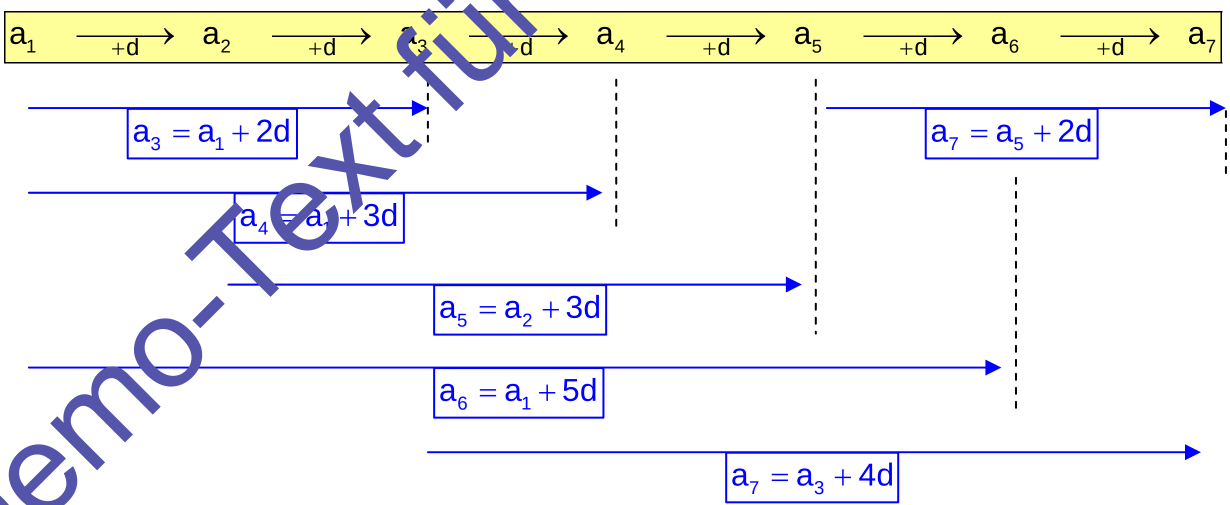
Wir wollen also a_n aus a_1 berechnen. Dazu muss man zu a_1 (n-1)-mal d addieren:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$$

Ausführlich: $a_n = 4 + (n-1)\cdot(-3) = 4 - 3n + 3 = 7 - 3n$

$$\boxed{a_n = -3n + 7}$$

(3) **Allgemeine Darstellung**



Betrachten wir $a_6 - a_2 = 4d$. Dies bedeutet $a_6 = a_2 + 4d$. (Zwischen der 6. und der 2. Latte sind 4 Zwischenräume) Oder: $a_4 - a_1 = 3d$ also $a_4 = a_1 + 3d$ (Zwischen der 1. und 4. Latte sind drei Zwischenräume).

Allgemeine Berechnungsformel: $a_n - a_1 = (n-1)\cdot d$ bzw.

MERKE: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$ und $\boxed{a_n = a_m + (n-m)\cdot d}$

(4) Training: **Berechne aus der rekursiven Formel die explizite Gleichung:**

Beispiel 1: Gegeben ist die rekursive Formel $\boxed{a_{n+1} = a_n + 4}$ mit $a_1 = 12$.

Man erkennt $d = a_{n+1} - a_n = 4$ und folgert aus $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$:

$a_n = 12 + (n-1) \cdot 4$ d. h. $a_n = 12 + 4n - 4$

Explizite Formel: $\boxed{a_n = 8 + 4n}$

Beispiel 2: Gegeben ist $\boxed{a_{n+1} = a_n + 31}$ mit $a_1 = -20$.

Man erkennt $d = a_{n+1} - a_n = 31$ und folgert aus $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = -20 + (n-1) \cdot 31$ d. h. $a_n = -20 + 31n - 31$

Explizite Formel: $\boxed{a_n = -51 + 31n}$

Beispiel 3: Gegeben ist $\boxed{a_{n+1} = a_n - 10}$ mit $a_1 = 14$.

Man erkennt $d = a_{n+1} - a_n = -10$ und folgert:

$a_n = 14 + (n-1) \cdot (-10)$ d. h. $a_n = 14 - 10n + 10$

Explizite Formel: $\boxed{a_n = 24 - 10n}$

Beispiel 4: Gegeben ist $\boxed{a_{n+1} = a_n + \frac{3}{2}}$ mit $a_1 = \frac{5}{2}$.

Man erkennt $d = a_{n+1} - a_n = \frac{3}{2}$ und folgert:

$a_n = \frac{5}{2} + (n-1) \cdot \frac{3}{2}$ d. h. $a_n = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

Explizite Formel: $\boxed{a_n = 1 + \frac{3}{2}n}$

(5) **Weitere Beispiele:**

a) $4;\ 9;\ 14;\ 19;\ 24;\ \ldots$

Es ist
$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 9 - 4 = 5 \\ a_3 - a_2 &= 14 - 9 = 5 \\ a_4 - a_3 &= 19 - 14 = 5 \\ \text{und}\quad a_5 - a_4 &= 24 - 19 = 5 \end{aligned}\right\}$$

Pflichttext:
Da die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, und zwar 5, liegt eine arithmetische Folge vor.

Aufstellung der expliziten Folge mit der Formel

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ d. h. $a_n = 4 + (n-1) \cdot 5$ d. h. $a_n = 4 + 5n - 5$

$\boxed{a_n = 5n - 1}$

b) $28;\ 12;\ -4;\ -20;\ \ldots$

Pflichttext:
Da die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, und zwar -16, liegt eine arithmetische Folge vor.

Es ist $a_2 - a_1 = 12 - 28 = -16$

$a_3 - a_2 = -4 - 12 = -16$

$a_4 - a_3 = -20 - (-4) = -20 + 4 = -16$

Aufstellung der expliziten Folge mit der Formel $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$:

d. h. $a_n = 28 + (n-1) \cdot (-16)$ d. h. $a_n = 28 - 16n + 16$

$\boxed{a_n = -16n + 44}$